物理（力学）	6 枚の内 1

[1] 図 1-1 のように，質量 m のボールを初期速さ v_0 で水平面から角度 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ で投げ上げる．x 軸を水平方向に，y 軸を鉛直方向上向きに取り，ボールの初期位置を原点に取る．重力加速度を g とする．ボールは鉛直下向きの重力 mg および速さ v に比例した空気抵抗 mkv（k：単位質量あたりの比例係数）を受けながら図のように運動する．時刻 t でのボールの速度と位置を考える．

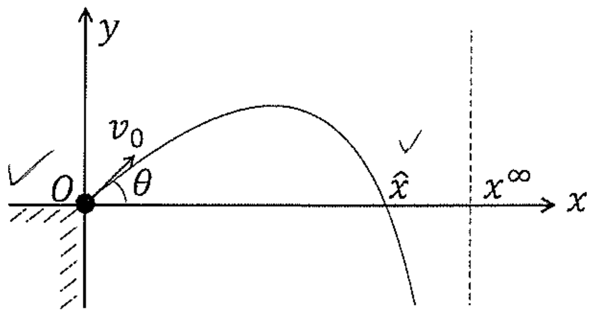

図 1-1

以下の文章を読んで，(A) ～ (O) に適した式か値を埋めよ．なお，[　] は [　] と同じものを表す．速度の x 軸方向，y 軸方向の成分をそれぞれ v_x，v_y とする．

x 軸方向の運動方程式を v_x を用いて表すと

$$m\frac{dv_x}{dt}=\boxed{\quad(A)\quad} \tag{1-1}$$

となる．同様に，y 軸方向の運動方程式を v_y を用いて表すと

$$m\frac{dv_y}{dt}=\boxed{\quad(B)\quad} \tag{1-2}$$

となる．式 (1-1) の微分方程式を解き，初期条件を適用すると，時刻 t での速度の x 軸方向の成分 v_x は

$$v_x=\boxed{\quad(C)\quad} \tag{1-3}$$

となる．同様に，式 (1-2) の微分方程式を解くと，時刻 t での速度の y 軸方向の成分 v_y は

$$v_y = \boxed{\quad (D) \quad} \tag{1-4}$$

と表される．式 (1-3) と式 (1-4) の両辺をそれぞれ t で積分することにより，時刻 t での位置 x および y は

$$x = \boxed{\quad (E) \quad} \tag{1-5}$$

$$y = \boxed{\quad (F) \quad} \tag{1-6}$$

となる．

時間が十分に経ったとき，式 (1-3) と式 (1-4) からボールの速度は終端速度 $\boxed{(G)}$ に近づく．このとき，水平方向の位置は式 (1-5) より $x^{\infty} = \boxed{(H)}$ に近づき，これより遠くへは飛ばない．

次に，ボールが投射地点と同じ高さを通過するときの水平到達距離 $\hat{x}$ を考える．式 (1-5) と式 (1-6) から t を消去することで，以下の式によってボールの軌道を得ることができる．

$$y = \left(\boxed{\quad (I) \quad} \right) x + \frac{g}{k^2} \ln\left(\boxed{\quad (J) \quad} \right) \tag{1-7}$$

式 (1-7) において $y = 0$ を x について解くと水平到達距離 $\hat{x}$ が得られる．

空気抵抗の比例係数 k が十分小さいとき，水平到達距離 $\hat{x}$ を最大にする投射角を考える．対数関数のテイラー展開 $\ln(1-z) = -z - z^2/2 - z^3/3 - \cdots$ を 2 次の項まで用いて式 (1-7) を近似すると，ボールの軌道は $y = \boxed{(K)}\, x - \boxed{(L)}\, x^2$ の放物線を描く．したがって，水平到達距離 $\hat{x} = \boxed{(M)}$ が最大となるのは投射角が $\theta = \boxed{(N)}$ のときであり，空気抵抗がないときと同じ結果になる．

式 (1-7) の対数関数のテイラー展開を 3 次の項まで考慮した場合を考える．水平到達距離 $\hat{x}$ が投射角 θ に関して最大となるとき，条件式 $\dfrac{d\hat{x}}{d\theta} = \boxed{\text{(O)}}$ を満たす必要がある．ところが，これを実際に計算してみると，$\theta =$ (N) のときにこの条件式は満たされない．この場合，この投射角では水平到達距離を最大にできないことがわかる．

[2] xy 平面内で運動する剛棒に関して，以下の問いに答えよ．重力の影響は無視できるものとする．記号の上のドットひとつは一階の時間微分を，ふたつのドットは二階の時間微分を表す．

[2-1] 以下の文章を読んで $\boxed{\quad (a) \quad}$ から $\boxed{\quad (k) \quad}$ に適した式を埋めよ．

図 2-1 のように， x 軸上に長さ L の剛棒 OA を設置する．剛棒の端点 O をヒンジで固定し，滑らかに回転できるようにする．もう一方の端点 A には，バネ定数 k のバネを取り付ける．

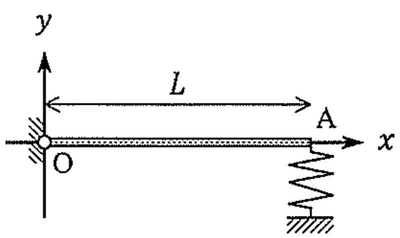

図 2-1

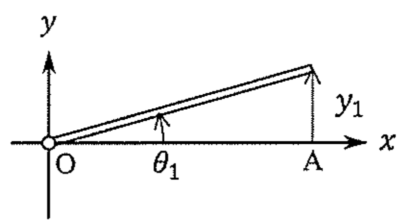

図 2-2

図 2-2 に示すように，点 A の y 方向変位を y_1 ，剛棒の回転角を θ_1 とする．回転角は反時計まわりを正とする．変位 y_1 が剛棒の長さ L と比較して十分小さいと仮定すると，回転角 θ_1 は y_1 を用いて，$\boxed{\quad (a) \quad}$ と近似できる．バネの復元力が ky_1 で与えられるとき，点 O まわりの剛棒の回転の運動方程式は，点 O まわりの剛棒の慣性モーメント I_0 を用いて，次のように書ける．

$$I_0\ddot{\theta}_1 = \boxed{\quad (b) \quad}$$

この剛棒は周期運動をする．周期運動の角振動数は $\omega = \boxed{\quad (c) \quad}$ である．

図 2-3 のように，図 2-1 の剛棒 OA の延長線上に，剛棒 AB を設置する．剛棒 AB は剛棒 OA と同一の寸法および密度分布を有する．2 本の剛棒は点 A においてヒンジで接続され，滑らかに回転できるようにする．また，剛棒 AB の端点 B には，バネ定数 k のバネを取り付ける．

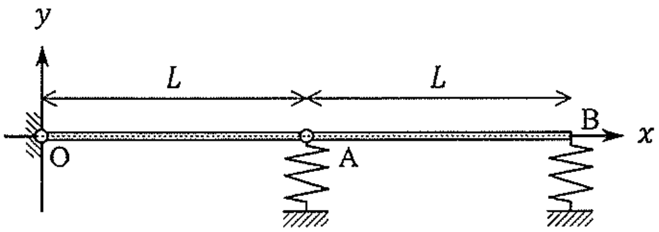

図 2-3

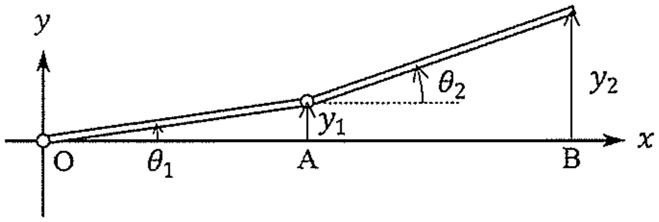

図 2-4

図 2-4 に示すように，点 B の y 方向変位を y_2 ，剛棒 AB の回転角を θ_2 とする．変位 y_1，y_2 が剛棒の長さ L と比較して十分小さいと仮定すると，回転角 θ_2 は，$\boxed{\quad (\mathrm{d}) \quad}$ と近似できる．

点 A に作用する復元力 ky_1 は，剛棒 OA に対して作用する力 F_1 と剛棒 AB に作用する力 F_2 に分けることができる．これらの力は，$F_1 + F_2 = ky_1$ を満足する．点 B には復元力 ky_2 が作用する．

このとき，点 O まわりの剛棒 OA の回転の運動方程式は，

$$I_0\ddot{\theta}_1 = \boxed{\quad (\mathrm{e}) \quad} \tag{2-1}$$

となる．剛棒 AB の質量中心が剛棒の中点にあるとき，剛棒の質量中心まわりの慣性モーメント I_C を用いて，質量中心まわりの回転の運動方程式は，

$$I_C\ddot{\theta}_2 = \boxed{\quad (\mathrm{f}) \quad} \tag{2-2}$$

となる．剛棒 AB の質量中心の y 方向変位は， $(y_1 + y_2)/2$ と書けるので，剛棒の質量 M を用いて，質量中心の運動方程式は，

$$M\frac{\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2}{2} = \boxed{\quad (\mathrm{g}) \quad} \tag{2-3}$$

となる．式 (2-1), (2-2), (2-3) から F_1 および F_2 を消去すると次の 2 式を得る．

$$\boxed{\quad (\mathrm{h}) \quad}\ \ddot{y}_1 + \boxed{\quad (\mathrm{i}) \quad}\ \ddot{y}_2 = -ky_1 \tag{2-4}$$

$$\boxed{\quad (\mathrm{j}) \quad}\ \ddot{y}_1 + \boxed{\quad (\mathrm{k}) \quad}\ \ddot{y}_2 = -ky_2 \tag{2-5}$$

この 2 式から 2 つの剛棒は連成振動することが分かる．

[2-2] 2 つの慣性モーメント I_O と I_C の間に成立する関係式を書け．

[2-3] 式 (2-4), (2-5) は， Lagrange の運動方程式を用いて導出することもできる．この導出に必要となる運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U の差 $L = K - U$ を書け．ただし， θ_1 および θ_2 を用いずに書くこと．

[2-4] 式 (2-4), (2-5) から，この連成振動の 2 つの固有角振動数とそのそれぞれに対応する固有振動モードを得ることができる．その計算手順を述べよ．具体的に値を求める必要はない．なお，式 (2-4), (2-5) は，行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いて $M\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{y}} = -k\boldsymbol{y}$ と表されるものとする．ベクトル $\boldsymbol{y}$ は次式で表される．

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$