[1]　図 1 に示すように，質量 m の剛体が中空円筒の内面および摩擦のない滑らかな水平面との接触を保ちながら転がらずにすべり運動するものとする．この時，剛体の重心は半径 R の円に沿って運動する．剛体の寸法は中空円筒内すべり面の半径に比べて十分小さく，また剛体の回転慣性モーメントは無視できるものとする．この時の剛体の運動に関する以下の記述について，空欄(a)～(p)に入る数式を答えよ．いずれの数式にも，文中で説明される定数 m, R, μ, 変数$\theta(t)$およびその時間に関する微分 $\dot{\theta}(t)$，$\ddot{\theta}(t)$（それぞれ $d\theta/dt$, $d^2\theta/dt^2$ を表す）を必要に応じて用いて良い．

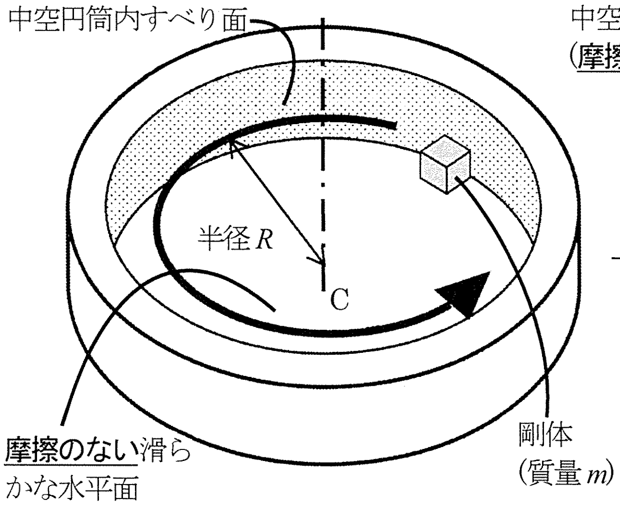

図 1

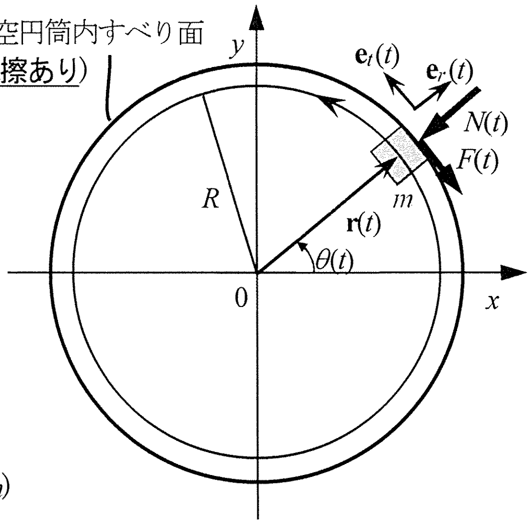

図 2

[1-1] 剛体が反時計回りに運動している時，中空円筒内すべり面から剛体に作用する垂直抗力 $N(t)$およびすべり面から剛体に作用する摩擦力 $F(t)$を求めたい．図 2 のように，中空円筒内すべり面の中心軸の水平面上の位置 C を原点とする xy 直交座標系を考える．時間 t における剛体重心の位置は，座標系の原点と剛体を結ぶ直線が x 軸と反時計回りに成す角度$\theta(t)$で表す．剛体がすべり面を一周して（あるいは 2 周以上周回して）さらに反時計回りに運動を続ける場合は，座標$\theta(t)$の値はそのまま連続に増加し 2π よりも大きな値で表すものとする．

平面上の xy 座標系における剛体重心の 2 次元の位置ベクトルを記号 $\mathbf{r}(t)$ で表す．速度ベクトルは位置ベクトルの時間 t に関する 1 階微分であるので $\dot{\mathbf{r}}(t)$，加速度ベクトルは 2

物理（力学）	7 枚の内 2

階微分であるので $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ となる．$\mathbf{r}(t)$ と同じ向きの単位ベクトル $\mathbf{e}_r(t)$ と，それと直交し速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}(t)$ と同じ向きの単位ベクトル $\mathbf{e}_t(t)$ は，次のように表される．

$$\mathbf{e}_r(t) = \begin{Bmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_t(t) = \begin{Bmatrix} \boxed{\quad (a) \quad} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

これらの単位ベクトル $\mathbf{e}_r(t)$，$\mathbf{e}_t(t)$ を用いて位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$，速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}(t)$，加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ を表せば，以下のようになる．

$$\mathbf{r}(t) = R\,\mathbf{e}_r(t) \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \boxed{\quad (b) \quad}\,\mathbf{e}_t(t) \tag{3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \boxed{\quad (c) \quad}\,\mathbf{e}_r(t) + \boxed{\quad (d) \quad}\,\mathbf{e}_t(t) \tag{4}$$

ここで，中空円筒内すべり面から剛体に作用する垂直抗力（大きさ $N(t)$）は位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ と逆の向きに生じ，中空円筒内すべり面から剛体に作用する摩擦力（大きさ $F(t)$）は速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}(t)$ と逆の向きに生じる．したがって，剛体の運動方程式は $N(t)$, $F(t)$と単位ベクトル $\mathbf{e}_r(t)$，$\mathbf{e}_t(t)$ を用いて次式で表される．

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \boxed{\quad (e) \quad} \tag{5}$$

上式の左辺に式(4)を代入して整理すれば，次式が得られる．

$$\left(\boxed{\quad (f) \quad}\right)\mathbf{e}_r(t) + \left(\boxed{\quad (g) \quad}\right)\mathbf{e}_t(t) = 0 \tag{6}$$

$\mathbf{e}_r(t)$ と $\mathbf{e}_t(t)$ は互いに直交しており一次独立であることから，式(6)より垂直抗力 $N(t)$および摩擦力 $F(t)$はそれぞれ

$$N(t) = \boxed{\quad (h) \quad} \tag{7}$$

$$F(t) = \boxed{\quad (i) \quad} \tag{8}$$

と表せる．ここで，剛体と中空円筒内すべり面の間の摩擦係数をμとすると，摩擦力 $F(t)$と垂直抗力 $N(t)$の間には次の関係がある．

$$F(t) = \mu N(t) \tag{9}$$

式(7), (8), (9)を用いて，$N(t)$と $F(t)$を消去した座標$\theta(t)$に関する剛体の運動方程式が得られる．

$$\ddot{\theta}(t) + \boxed{\quad (j) \quad} = 0 \tag{10}$$

[1-2] 次に，時刻 $t = 0$ において位置$\theta = 0$ から中空円筒内すべり面に沿う向きに初速度 v_0 を与えて反時計回りに剛体の運動を生じさせた時の，その後の剛体の運動を求めたい．剛体の運動エネルギーTは，$\dot{\theta}$ を用いた次式で表される．

$$T = \boxed{\quad (k) \quad} \tag{11}$$

上式(11)を用いると，式(7)で与えられる垂直抗力 $N(t)$から$\dot{\theta}$ を消去して T を用いて表すことができる．その結果を式(9)に代入すれば，T を用いた摩擦力 $F(t)$の表現式が得られる．

$$F(t) = \boxed{\quad (l) \quad} \tag{12}$$

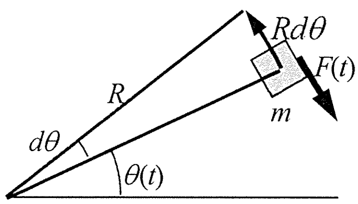

図 3

ここで，図 3 に示すように短時間の運動により剛体の位置が微小量 $d\theta$だけ増加する間に失われる剛体の運動エネルギーは，その間に剛体が摩擦力 $F(t)$によりなされる仕事に等しい．したがって，この間の摩擦力 $F(t)$の変化は無視できるとすれば，剛体の運動エネルギーの変化 dT が次式で表される．

$$dT = -FRd\theta \tag{13}$$

式(12)を式(13)に代入し $d\theta$のゼロへの極限を考えれば，運動エネルギーT が満たす座標θに関する 1 階常微分方程式が得られる．

$$\frac{dT}{d\theta} = \boxed{\quad (m) \quad} \tag{14}$$

一方で初期条件より $T(0) = (1/2)mv_0^2$ であることを考慮して，式(14)の解を v_0 を用いてθの関数として求めれば，次式となる．

$$T(\theta) = \boxed{\quad (n) \quad} \tag{15}$$

さらに，式(11)を式(15)の左辺に代入し T を消去して整理すると，$\theta(t)$が満たす 1 階常微分方

程式が得られる.

$$\dot{\theta} = \boxed{\quad (o) \quad} \tag{16}$$

初期条件$\theta(0)=0$ を満たす上式の解を求めれば，剛体の運動が得られる.

$$\theta(t) = \boxed{\quad (p) \quad} \tag{17}$$

この結果より，剛体は初速度 v_0 から次第に減速しながら運動するが，どれだけ時間 t が経過しても剛体は停止せず，また式(9)を仮定する限り中空円筒内すべり面上の運動の周回回数の上限はないことになる.

物理（力学）	７枚の内５

[2] 質点の振り子の運動について，以下の空欄(A)～(P)を埋めなさい．質点の大きさ，糸の質量，糸周りの回転，糸の伸び縮みおよび摩擦等の損失は無視し，糸にたわみは生じないものとする．以下では，座標系は鉛直上向きにy軸，水平右向きにx軸をとり，単位はMKS単位系および角度ラジアンを用い，重力加速度をgとあらわす．なお，解答の数式には，問い右側の括弧内に示す記号のみを用いること．ただし，全ての記号を用いるとは限らない．

[2-1] 図 4 に示すように，質量 m を持つ質点が長さ l の糸に点 O から吊るされている．糸が張った状態で質点を持ち上げて手を離す場合の，xy 平面内の円弧s 上での質点の微小振動を考える．なおy 軸からの糸の角度をθとする．

質点に働く力は，鉛直下向きに働く重力F_Gと糸の張力F_Tであり，円弧sの方向に合力F_Oが作用する．F_Oの大きさを表せば次式となる．

$$F_O = \boxed{\text{(A)}} \quad (\theta, g, l, m) \tag{1}$$

これより，円弧s 上で振動する質点の運動を考えると，θ に対する運動方程式が成り立つ．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boxed{\text{(B)}} \quad (\theta, g, l, m) \tag{2}$$

ここで微小振動$\theta \ll 1$を仮定すると，x 成分の位置は$\boxed{\text{(C)}}$ (θ, g, l, m)と近似できる．これより，式(2)は次式のように単振動の式に書き換えられる．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boxed{\text{(D)}} \quad (\theta, g, l, m) \tag{3}$$

次に式(3)の解が定数A，角振動数ω および定数δを用いて，$\theta = A\cos(\omega t + \delta)$で表されるとする．このとき，$t = 0$ で初期角度 θ_0 での静止状態から質点を静かに離すと，時刻t における角度θ と角振動数ω は以下のように与えられる．

$$\theta = \boxed{\text{(E)}} \quad (t, \theta_0, \omega) \tag{4}$$

$$\omega = \boxed{\text{(F)}} \quad (\theta, g, l, m) \tag{5}$$

続いて，式(3)の右辺に強制項Fが加わる場合を考える．

$$F = B\cos\omega_F t \tag{6}$$

ここでB およびω_F は定数であり，$\omega_F \neq \omega$とする．この時，質点の運動が定数C を用いて

$$\theta = C\cos\omega_F t \tag{7}$$

という形の振動になったものと仮定する．C を求めれば

$$C = \boxed{\text{(G)}} \quad (B, \omega, \omega_F) \tag{8}$$

となる．式(8)より，強制項の角振動数 ω_F が振り子の持つ固有振動数 ω に近づくと，振動の振幅が増加することがわかる.

[2-2] 図 5 に示すように，質量 m_1, m_2 を持つ 2 つの質点がそれぞれ長さ l_1, l_2 の糸を用いて点 O から吊るされている．xy 平面内の 2 つの質点の微小振動を考える.

この場合，質点 2 の運動は質点 1 の位置から見た振り子の運動，質点 1 の運動は質点 2 から作用する力を考慮した点 O から見た振り子運動と見なせる．各質点の x 軸方向の変位を x_1, x_2，角度を θ_1, θ_2 とする．式(3)をもとに，変位 x_1, x_2 についての連成した単振動の運動方程式は以下のようにあらわされる.

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \boxed{\text{(H)}} - \boxed{\text{(I)}} \quad (x_1, x_2, g, l_1, l_2, m_1, m_2) \tag{9}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \boxed{\text{(I)}} \quad (x_1, x_2, g, l_2, m_2) \tag{10}$$

ついで，2 つの質点が同じ角振動数 ω と位相 δ を持って振動する場合を考える．この場合，変位 x_1, x_2 は以下のようにあらわされる.

$$x_1 = A\cos(\omega t + \delta) \tag{11}$$

$$x_2 = B\cos(\omega t + \delta) \tag{12}$$

ここで A および B は定数である．式(11)，(12)を式(9)，(10)に代入すると，A および B について以下の連立方程式を得る.

$$\boxed{\text{(J)}}\ A + \boxed{\text{(K)}}\ B = 0 \quad (g, l_1, l_2, m_1, m_2, \omega) \tag{13}$$

$$\boxed{\text{(L)}}\ A + \boxed{\text{(M)}}\ B = 0 \quad (g, l_1, l_2, m_1, m_2, \omega) \tag{14}$$

これから A, B を消去すると，角振動数 ω と質量 m_1, m_2 および糸の長さ l_1，l_2 について以下の関係を得る.

$$\boxed{\text{(N)}} = 0 \quad (g, l_1, l_2, m_1, m_2, \omega) \tag{15}$$

式(15)を満足する正の ω の値として ω_1, ω_2 の 2 つが存在する．もし 2 つの質点の質量が $m_1 \gg m_2$ の関係である場合，式(15)より ω_1, ω_2 が求められる.

$$(\omega_1, \omega_2) = \left(\sqrt{\frac{g}{l_1}}, \sqrt{\frac{g}{l_2}}\right) \tag{16}$$

式(13)もしくは(14)より，このときの 2 つの質点の振動の大きさをあらわす定数AとBの比は以下のように求められる.

$$\frac{A}{B} = \boxed{\text{(O)}} \text{ および } \boxed{\text{(P)}} \quad (g, l_1, l_2) \tag{17}$$

式(17)より，定数AとBの比の絶対値の大きな方の振動は，2 つの糸の長さの大小関係に応じて，2 つの質点の変位が同方向もしくは逆方向になることがわかる.

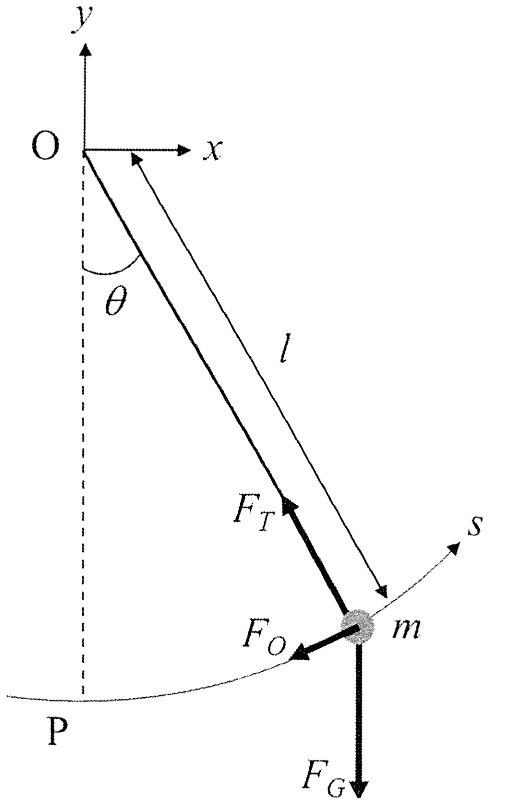

図 4

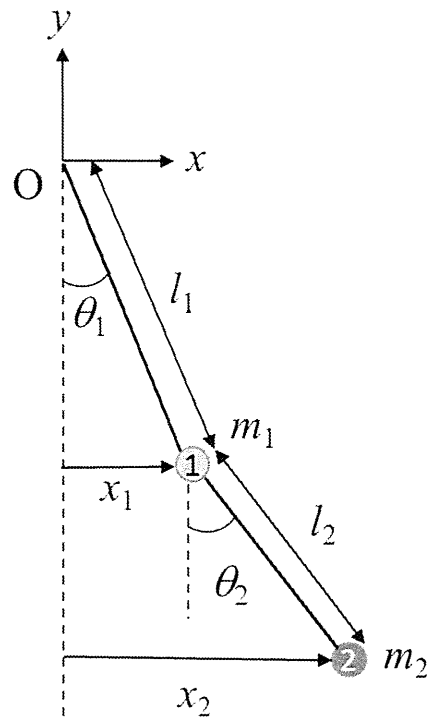

図 5