

数 学

3 枚の内 1

[1] Fourier 変換に関する以下の問いに答えよ。ただし、 $f(x)$ の Fourier 変換 $F(y)$ は、

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

および $F(y)$ の Fourier 逆変換 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy$$

で表されたとする。ただし、 $i^2 = -1$ とする。

[1-1]

$$f(x) = e^{-|x|}$$

の Fourier 変換を求めよ。

[1-2] [1-1]の結果を用いて、定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

を計算せよ。

数 学	3 枚の内 2
[2] 次の各問いに答えよ. [2-1] 行列 $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ ($0 < p < 1, 0 < q < 1$) について次の問いに答えよ. 1) 固有値および固有ベクトルを求めよ. 2) 上で求めた 2 つの固有ベクトル P_1, P_2 からなる正方行列を $P = (P_1, P_2)$ とするとき, $P^{-1}AP$ を求めよ. 3) A^n を求めよ. n は正の整数とする. 4) $n \rightarrow \infty$ のとき, A^n はどのような行列に近づくかを示せ. [2-2] 直交直線座標系 $O-xyz$ について, O を原点とし, x 軸, y 軸, z 軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする. このとき, 次のベクトル場 $\mathbf{B}$ について, 下記の問いに答えよ. $\mathbf{B} = (2p + 1)x^2y\mathbf{i} + \{px^3 + (1 + p)yz\}\mathbf{j} + (y^2 + pz^2)\mathbf{k}$ ここに, p は定数とする. 1) ベクトル場 $\mathbf{B}$ の発散 $\text{div } \mathbf{B}$ を求めよ. 2) ベクトル場 $\mathbf{B}$ の回転 $\text{rot } \mathbf{B}$ が恒等的に $\mathbf{0}$ (零ベクトル) となるように定数 p を定めよ.	

数 学

3 枚の内 3

[3] ある河川堤防において、100 年間に越水の起こる（水位が堤防の高さを超えてあふれる）年数を X とする。越水は年最大水位のみによって起こるものとし、年最大水位が堤防高を超える確率を p とすると、 X は二項分布 $B(100, p)$ に従う。以下の問いに答えよ。

[3-1] 100 年間に越水が一度も起こらない確率 $\Pr[X = 0]$ を、 p を用いて表せ。

[3-2] 100 年間に越水が一度でも起こる確率を $1/100$ 以下にしたい。このことを p と $1/100$ を用いて不等式で表せ。

[3-3] 年最大水位 h が下図のような確率密度関数 $f(h)$ を持つとき、 h の超過確率 $W(h) = \int_h^{\infty} f(k)dk$ を示せ（ただし、 $2 \text{ m} \leq h \leq 4 \text{ m}$ のときにおいて）。

