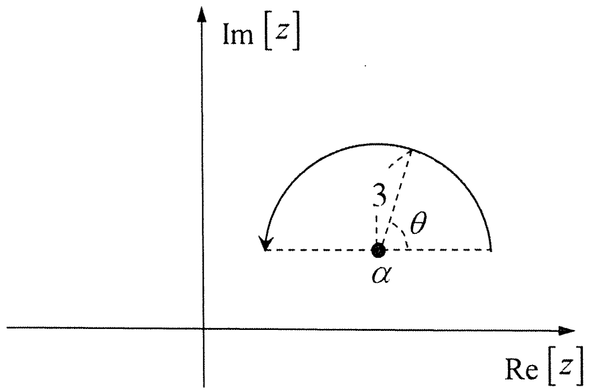
数　　学	３枚の内１

[1]　以下の[1-1]～[1-2]の問いに答えよ．

[1-1] 複素積分 $\int_C (z-\alpha)^2 dz$　を考える．下図のように，積分路 C は点 α を中心とする半径 3 の半円とする．積分の向きを下図の矢印で示す．図中の $\mathrm{Re}[z]$，$\mathrm{Im}[z]$ は，それぞれ z の実部，虚部を表す．また，θ を複素数 $(z-\alpha)$ の偏角とする．このとき，次の(1)～(2)の問いに答えよ．

(1)　$\int_C (z-\alpha)^2 dz$　を　θ　についての定積分に変換せよ．

(2)　(1)の結果を使って　$\int_C (z-\alpha)^2 dz$　を計算せよ．



[1-2]　$-\infty < t < \infty$ で定義される，区分的に滑らかで絶対可積分である関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt$　と定義する．ここで，区分的に滑らかで絶対可積分である関数 $g(t)$ および $h(t)$ の合成積を $(g*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)h(t-s)ds$　と定義する．このとき $F\left[(g*h)(t)\right] = F\left[g(t)\right]F\left[h(t)\right]$　を証明せよ．

数　学	３枚の内２

[2] 連続確率変数Xが確率密度関数$f_X(x)$を持つとする．次の問いに答えよ．

[2-1] Xの期待値が $E(X)=\mu$，分散が $V(X)=\sigma^2$で表されるとき，確率変数 $Y=aX+b$ の期待値および分散を求めよ．なお，a,bは実定数とする．

[2-2] 確率変数 Xの関数 $g(X)=e^{hX}$を考え，その期待値 $M(h)$を式 (1)で表す．

$$M(h)=E(e^{hX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{hx}f_X(x)dx \qquad (1)$$

ただし，$M(h)$は hの関数である．式 (1)で定義される関数が存在するとき，それを積率母関数（もしくはモーメント母関数）という．積率母関数は確率変数の分布を完全に特定でき，任意の次数の積率を算出できる．いま確率変数Xが正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，その積率母関数 $M(h)$は式 (2)で表される．

$$M(h)=E(e^{hX})=e^{\mu h+\sigma^2h^2/2} \qquad (2)$$

このことを用いて，確率変数 $Y=2X+3$が正規分布に従うことを証明せよ．

[2-3] 確率変数 Xが正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う場合，式 (2)が成り立つこと示せ．正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の確率密度関数は式 (3)で与えられる．

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (-\infty<x<\infty) \qquad (3)$$

数　　学	３枚の内３

[3] 以下の初期値・境界値問題について，[3-1]～[3-3]の問いに答えよ．

偏微分方程式： $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$　　$(0 < x < 2, 0 < t < \infty)$

境界条件： $u(0,t) = u(2,t) = 0$　　$(0 < t < \infty)$

初期条件： $u(x,0) = u_0$　　$(0 \leq x \leq 2)$

ここに，u_0 は定数とする．

[3-1] 変数分離法を用いて，与えられた偏微分方程式から x および t に関する 2 つの常微分方程式を導け．

[3-2] [3-1]で導いた常微分方程式を解き，境界条件を満たす偏微分方程式の解を求めよ．ただし，解は積分定数を含む形でよい．

[3-3] 初期条件を満たすように[3-2]で求めた解の積分定数を求めることにより，偏微分方程式の解が以下となることを導出せよ．

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{4} t\right) \sin\frac{n\pi}{2} x$$

ここに，nは整数とする．ただし，導出には以下の関係式を用いて良い．

$$\int_0^2 \sin\frac{m\pi x}{2} \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

ここに，m，nは整数とする．