数　　学	３枚の内１

[1] 直交座標(x, y)で，曲線 C を次式で定義する.

$$C(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

[1-1] 曲線 C を極座標(r, θ)で表せ.

[1-2] 曲線 C 上の x の最大値を求めよ.

[1-3] 曲線 C 上の y の最大値を求めよ.

[1-4] 曲線 C を xy 平面上に図示せよ.

[1-5] 曲線 C で囲まれた面積 S を求めよ.

[2] 次式で $x(t)$ のラプラス変換を定義する．ただし，$s > 0$ とする．

$$X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

[2-1] 次の関数のラプラス変換を求めよ．

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad (\alpha \geq 0)$$

[2-2] 次の関数のラプラス変換を求めよ．

$$x(t) = t$$

[2-3] 次の微分方程式のラプラス変換を求めよ．ただし，$t = 0$ のとき，$x = 0$ および $\frac{dx}{dt} = -1$ とする．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2e^{-3t} \tag{1}$$

[2-4] 式(1) を解け．ただし，$t = 0$ のとき，$x = 0$ および $\frac{dx}{dt} = -1$ とする．

[2-5] $x(t)$ と $y(t)$ の畳み込み積分のラプラス変換は，次式で表される．

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty x(t-u)y(u)\,du\right\}(s) = X(s)Y(s)$$

$Y(s)$ は $y(t)$ のラプラス変換である．次式の積分方程式を解け．

$$x(t) = 1 + \int_0^\infty e^{-(t-u)}x(u)\,du$$

数　学	３枚の内３

[3] 実ベクトル $\vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ のノルムを次式で定義する．

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

[3-1] $\boldsymbol{Q}$ を 3×3 の直交行列とする．すなわち，$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^{-1}$ である．ここで，T は行列の転置を表す．$|\vec{x}| = |\boldsymbol{Q}\vec{x}|$ を証明せよ．

[3-2] 対称行列 $\boldsymbol{A}$ は直交行列 $\boldsymbol{P}$ および対角行列 $\boldsymbol{D}$ を用いて次式で書ける．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{A}$ が次式で与えられるとき，$\boldsymbol{D}$ を求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

[3-3] $\vec{x} \neq \vec{0}$ のとき，$\dfrac{\vec{x} \cdot (\boldsymbol{A}\vec{x})}{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ の最大値を求めよ．$\boldsymbol{A}$ は式(2)で表される．